Vorbemerkung

Die Entdeckung, dass die Verhältnisse des Goldenen Schnittes in vielfachen Varianten die Erscheinungen des biologischen Lebens bestimmend proportionieren, lenken den Blick auf etwas, wie eine naturgesetzliche Ästhetik.
Diese verstehe ich hier als Ausdruck einer umfassenden, komplexen Stimmigkeit der naturgesetzlichen Existenz schlechthin; oder, um mit Johannes Kepler zu sprechen, der „Harmonices Mundi“, der Weltharmonik.

Harmoniesysteme und Goldener Schnitt

Wenn systematische wissenschaftliche und auch philosophische Forschungen überhaupt möglich sind, so verdanken wir dies allein dem Umstand, daß die komplexen Erscheinungen der Wirklichkeit sich aus einfachen Anfängen nach einfachen naturgesetzlichen Prinzipien entwickelt haben. Erscheinungen der Wirklichkeit, bei denen ein forscherischer Zugriff wirklich Sinn macht, sind dementsprechend also Zwischen- oder Endprodukte von „einfach nach komplex“ gerichteter, wenn man so will, evolutionärer Prozesse - wobei diese im Wirklichkeitsbereich des Vergänglichen naturgemäß stets dann auch gegenphasig verlaufen, d.h. in der Praxis aus Wachsen und Vergehen bestehen.

Wie die Problematiken von Ökologie, Gesellschaft, Ökonomie usw. mittlerweile sehr eindrücklich lehren, schaffen solche Prozesse auf kompliziertestе und diffizilste Weise qualitative gleichgewichtige Vernetzungen, setzen systematische Prozesse solcher Art daher auch Gleichgewichtsbedingungen voraus – sind ihren Erscheinungsformen immer und überall Wesensmerkmale des Gleichgewichtes, wie insbesondere Symmetrie und Harmonie, zueigen; wobei ich diese Begriffe hier in einem höchst umfassenden Sinne verstehe und die Symmetrie dabei als eine **Eigenschaft** der Harmonie werte.

Damit aber wäre der Harmoniebegriff in der Tat mittelbar und unmittelbar ins Zentrum eines jeden systematischen Forschens und Betrachtens zu stellen.

Trotz oder auch gerade wegen dieser zentralen sowohl Bedeutung als auch denktechnischen Funktion ist der Begriff Harmonie freilich allgemein doch noch sehr umstritten - ist er jedenfalls alles andere als überzeugend bereits ausdefiniert. Ich will daher im Nachfolgenden meinen eigenen Deutungsbeitrag so weit und so fest wie möglich auf ein eindeutiges naturgesetzliches Fundament stellen.

Dies erfordert naturgemäß zunächst und vor allem anderen ein geeignetes „Betrachtungsobjekt“ - ein Harmoniesystem nämlich, das als solches sowohl unstrittig als auch naturwissenschaftlich erforschbar und erforscht ist und das darüber hinaus noch in einem prototypischen Sinne taugt.
All diese Kriterien erfüllt nun, wie ich zeigen werde, auf ideale Weise das physikalische Phänomen Klang.

1. Das Harmoniesystem Klang

Dieses ist, wie man weiß, ein komplexes periodisches Gebilde, das in eine Reihe harmonischer Teilgrößen zerlegt werden kann[1]. Letztere, Obertöne genannt, überlagern eine einfache Grundgröße, den Grundton; wobei sich die Frequenzen der einzelnen Obertöne der Reihe nach wie 1 zu 2, zu 3, zu 4, zu 5 usw. zu der des Grundtones verhalten.

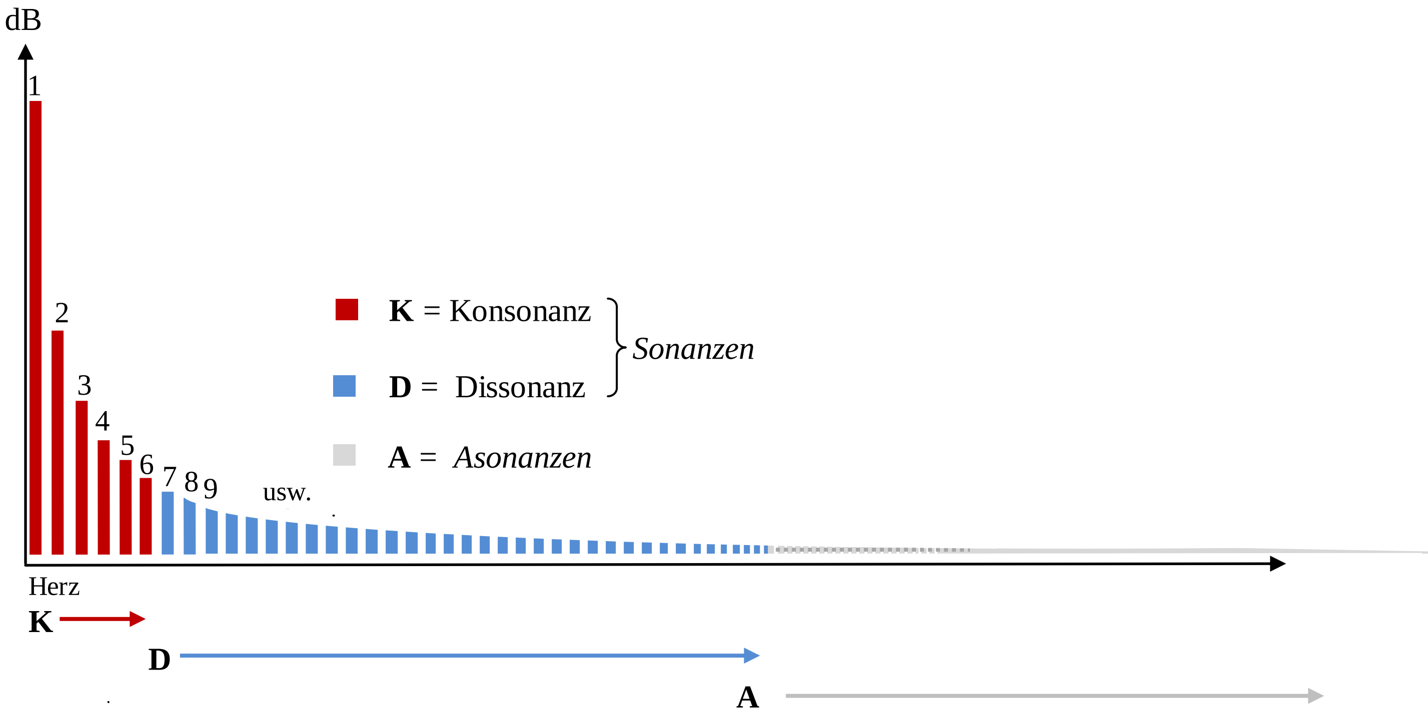
Aus diesem auf den ersten Blick tatsächlich eher unscheinbar anmutenden Mechanismus ergeben sich nun Konsequenzen vielschichtigster Art, deren richtiges und angemessenes Bewerten und Ordnen eine strenge systematische Analyse voraussetzten.

Gerade hier ist, wie ich zeigen werde, einiges freilich noch nicht hinreichend geleistet worden. Zunächst ist natürlich allseits bekannt, dass im Spektrum die jeweils benachbarten Teiltöne durch spezifische intervallische Abstände von einander getrennt sind.

Diese Abstände sind anfangs noch markant — wobei die Intervalle von der Oktave zwischen Grundton und erstem Oberton - über Quinte, Quarte, große Terz, kleine Terz usw. stufenweise gesetzmäßig und systematisch immer geringer werdend - sich allmählich einem (relativen) Nullwert annähern.

Die ersten Intervallstufen werden ihrer akustischen Wirkung nach als konsonant bezeichnet. Ihnen folgen die sog. Dissonanzen, die mit zunehmendem Teilungsgrad in der Obertonreihe allerdings relativ bald ihre, wie ich es nennen will, **„*sonante*“** Wirkung verlierend in einem **„*asonanten*“** allgemeinen, sozusagen stochastischen Rauschen aufgehen, das deswegen keine Einzeldifferenzierungen mehr zuläßt, weil immer mehr Teiltöne sich mit immer geringer werdenden Amplituden in einem immer engeren Frequenzbereich konzentrieren.

<u>Abb. 1</u>



[1] *Wie die Fourier-Analyse zeigt, gilt dies prinzipiell für jeden periodischen Vorgang*

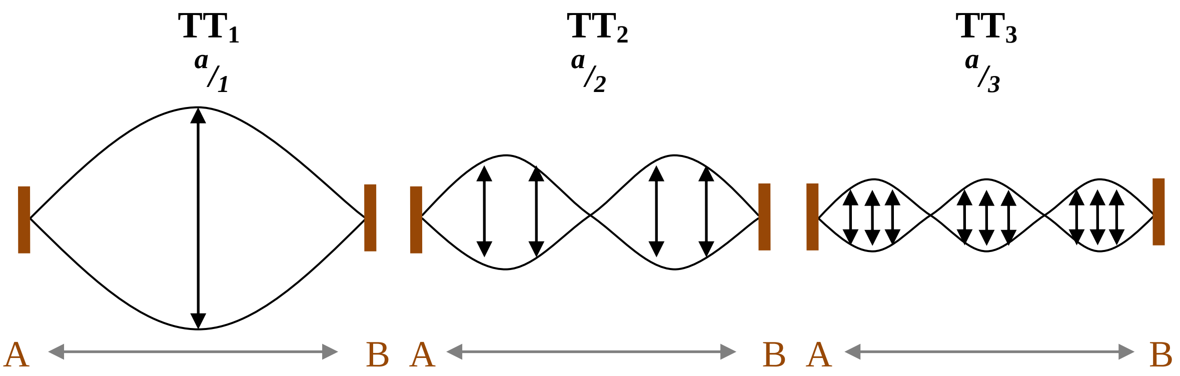
Aus der Abbildung wird nun ersichtlich, daß die „*sonanten*", damit meine ich die für sich differenzierbaren Teiltöne eine in Wahrheit verschwindende Minorität und umgekehrt die „*asonanten*", d.h. nicht mehr differenzierbar klingenden Teiltöne die weit überwiegende Majorität des Klangspektrums darstellen.
Wegen ihrer relativ überragenden Amplituden - darüber wird noch zu sprechen sein - sowie der daraus resultierenden dominant prägenden Wirkung im Spektrum nenne ich die „*sonante Minorität*" hier **wertfrei** „elitär" und dementsprechend die Vielzahl der ihrer jeweiligen Amplituden nach gen Null tendierenden *Asonanzen* **wertfrei** die „große Masse" des Spektrums - letzteres dabei im Sinne von spektraler Substanz bzw. eines unspezifischen Mediums der Harmonie Klang.
Die Minimalität der Amplituden und das Verschwimmen der „Identitätsgrenzen" im asonanten Bereich suggeriert nun unseren auf Markanz angelegten Wahrnehmungs- und Meßapparaten (irrtümlich) eine entsprechende energetische Bedeutungslosigkeit.
Und darum wird das harmonische Spektrum in aller Regel mit seinen wenigen *sonanten* Teilen, also mit den Konsonanzen und - wobei dies sogar mit Abstrichen - den Dissonanzen identifiziert. Die Tatsache, daß die weit überwiegende Mehrheit der Teilgrößen des Klanges *asonant* ist und darüber hinaus die *asonanten* Teiltöne die Minimalität ihrer Amplituden durchaus über eine räumliche und zeitliche Quantifizierung kompensieren, legt nun allerdings die Vermutung nahe, daß sich in Wahrheit sogar der überwiegende Teil der Energie des harmonischen Spektrums in seinen *asonanten* Bereichen verbirgt, daß diese also nicht bloß nicht vernachlässigbar, sondern sogar von entscheidender Bedeutung für das Ganze sind.
Um dem Aspekt der Energieverteilung im Spektrum besser nachgehen zu können, verlasse ich nun an dieser Stelle und für den Augenblick den Klang als solchen und wende mich dem zu, was diesem ursächlich zugrunde liegt; wie man weiß ist dies das Resonanzschwingen eines (spezialisierten) elastischen Körpers.
Mit dem Ziel dabei nach Möglichkeit zu verallgemeinerbaren Aussagen zu gelangen, wähle ich als Betrachtungsobjekt die mathematisierbare Idealisierung eines durch zwei Fixpunkte und einen idealen Elastizitätswert definierten eindimensionalen Objektes, das ich hier als eingespannte „elastische Strecke" bezeichne.[2]
Diese eingespannte „elastische Strecke" rege ich nun zu Resonanzschwingungen an, wobei sich ein - im Raummedium dann als Klang wirkendes und sich fortpflanzendes - spektrales System einander überlagernder „stehender" Biegewellen ausbildet.
Die Wellenlängen der einzelnen Teilschwingungen des Resonanzspektrums verhalten sich - das kennen wir schon vom Klang - wie 1, zu 2, zu 3, zu 4, zu 5 usw. zu der seiner Grundschwingung. Entsprechendes gilt dabei naturgemäß für deren jeweiligen Frequenzen und Amplituden.
Vor allem anderen interessiert mich hier allerdings - da es hier um die Energieverteilung im Spektrum geht - der Energieinhalt der einzelnen Teiltöne, d.h. seine Abhängigkeit von der Wellenzahl, von Frequenz und von Amplitude.
Nach den Regeln der Physik ist nun bekanntlich die Energie einer Schwingung dem Quadrat ihrer Amplitude proportional.
Für die Grundschwingung betrage die Amplitude hier a. Dies ergibt pro spezifische „*Zeit-*" und „*Geometrieeinheit*" also den Energiewert a^2. Da die erste Teilschwingung nur die halbe Länge der Grundschwingung aufweist und die Amplitude bei konstanter Anregungsenergie und identischen Elastizitätswerten der Wellenlänge proportional ist, schwingt die erste Teilschwingung bei gleicher Anregung mit der Amplitude $^{a^2}/_{2^2}$.

[2] *Die Saite eines musikalischen Saiteninstrumentes entspricht dem näherungsweise*

Ich errechne für sie also den Energiewert $^{a^2}/_{2^2} = {}^{a^2}/_4$.
Im Unterschied zur Grundschwingung tritt die erste Teilschwingung nun allerdings sozusagen in doppelter Ausführung in Erscheinung. Über dies hinaus durchläuft sie - da mit doppelter Frequenz schwingend - zwei Phasen in der Phasenzeit der Grundschwingung.
Will ich also die Energie der ersten Teilschwingung mit der der Grundschwingung vergleichen, dann muß ich (für die 1. Teilschwingung) mit 4 (*Zeitfaktor* plus „*Geometriefaktor*") multiplizieren - erhalte ich also den mit dem der Grundschwingung identischen Energiewert a^2.
Der gleiche Wert (a^2) ergibt sich - wie man leicht nachrechnen kann - wenn ich diese Rechnung für die 2., 3., 4., 5. usw. Teilschwingung jeweils durchführe.

Ich ziehe hieraus nun den Schluß, daß jede Teilschwingung eines idealisierten harmonischen Spektrums in der Tat die gleich Energie enthält wie die Grundschwingung, daß also alle primären Teilgrößen[3] des Spektrums der Natur nach energiegleich sind — sofern eben keine „*außerspektralen*" Kräfte störend einwirken.
Wenn aber die Energie einer jeden Teilschwingung dem Quadrat ihrer Amplitude pro Zeit- und *Geometrieeinheit* proportional ist, dann ist die Energiesumme des harmonischen Spektrums und mit dieser natürlich auch die Energie seiner Wirkung, nämlich der Harmonie, dem Quadrat der Amplitude der Grundschwingung *a* multipliziert mit der Zahl *q* seiner Oberschwingungen proportional ($E_{Sp} = a^2 * q$).

Abb. 2



Da ich keinen rational einleuchtenden oder gar überzeugenden Grund sehe, der es verbieten würde, Systematik, Merkmale und Kategorien der physikalischen Harmonie Klang auf den Harmoniebegriff als Ganzes zu übertrage, erscheint es mir sehr angebracht und legitim, aus alledem die folgenden (allgemeinen) Harmonieprinzipien herzuleiten:

1. *Harmonie ist ein symmetrisches gleichgewichtiges Ganzes aus konsonanten, dissonanten und asonanten Teilgrößen.*
2. *Harmonie vereint die Elemente Gleichheit und Ungleichheit in der Weise, daß jeder primäre Harmonieteil eine eigene, **allen** anderen primären Harmonieteilen gegenüber differierende Identität aufweist, zugleich aber jeder primäre Harmonieteil dem anderen energetisch gleichwertig ist.*

[3] *Als primäre Teilgröße bezeichne ich die jeweiligen Teilschwingungen als Ganzes. Deren Teile wären demnach dann „sekundäre Teilgrößen".*

3. *Die Identität eines primären „Harmonieteiles“ setzt sich aus zwei Faktoren zusammen. Den einen nenne ich Qualität - für ihn steht bei der Resonanzschwingung die Amplitude -, den anderen Quantität - beim Resonanzspektrum wird dieser zeitlich durch die Frequenz und geometrisch durch die dem Frequenzwert im Spektrum proportionale Teilungszahl der jeweiligen Oberschwingung repräsentiert.*
4. *In einem ungestörten Harmoniesystem ist das Produkt der beiden Identitätsfaktoren, ist also das* ***Produkt aus Qualität und Quantität konstant****.*
5. *Die hieraus resultierende umgekehrte Proportionalität von Qualität und Quantität im Harmonieganzen begründet und erklärt die Existenz von Hierarchie, von Elite und (wertfrei) „Masse“ auf naturgesetzliche Weise.*
6. *Die Elite in der Harmonie zeichnet sich ihrer qualitativen Natur entsprechend durch eine spezifische Wirkfähigkeit aus. Diese Wirkfähigkeit betrifft und bedingt, schafft und erhält die innere Ordnung im Harmoniesystem und beruht auf drei unterschiedlichen Wirkaspekten der „Kraft“. Deren ersten nenne ich die* ***Anziehung****, deren zweiten die* ***Abstoßung****, deren dritten die* ***Aufprägung****. Die beiden ersten kennen wir z.B. vom Magnetismus - bezogen auf den Klang identifiziere ich beide zunächst einmal analogisch mit Konsonanz und Dissonanz. Die dritte ist insbesondere im Musikinstrumente-Bereich von ausschlaggebender Bedeutung und bekannt dort unter dem Stichwort „Resonanz“.*

Die Abläufe im Zusammenhang von Ein- und Aufprägung lassen sich daher am Beispiel etwa der Geige anschaulich darstellen und erläutern:

> Wie alle Saiteninstrumente ist die Geige der Natur nach eine symbiotische Verkoppelung zweier gegensätzlicher Körper. Der eine dieser Körper ist die Saite, die - wie bereits angedeutet - der im Früheren definierten „elastischen Strecke“ wesensmäßig entspricht und die wegen ihrer annähernden Eindimensionalität zu angemessen hohen Amplituden im *sonanten* Bereich und damit zur Ausbildung eines annähernd idealen harmonischen Resonanzspektrums prädestiniert ist.
> Der andere, der eigentliche Violin-Korpus, entspricht demgegenüber einem dünnwandigen Hohlkörper, der für sich alleine - regt man ihn zu Eigenschwingungen an - nur ein geräuschhaftes Spektrum mit unterrepräsentierten *sonanten* Anteilen entwickelt.
> Über die symbiotische Verkoppelung mit der Saite und über eine gezielte Lenkung der Anregungsenergie zunächst in die, wie gesagt, auf den *sonanten* Bereich „spezialisierte“ Saite erhalten die konsonanten und dissonanten Resonanzanteile des Geigenkorpus dann hinreichende Amplituden, entsteht der typische Geigenklang.

Auch wenn die Resonanzleistung dort natürlich größer ist, wo spezielle Körperresonanzen der Geige verstärkend mitwirken, bleibt der von der Saitenresonanz ausgehende Prägungsfaktor der *Sonanzen* ausschlaggebend für den Klang des Ganzen.
Wie bei jedem Quanten- bzw. Masseneffekt werden dabei - davon gehe ich hier aus - im Rahmen der **Kombinationstonbildung** die statistisch in den von der Saite *sonant* vorgegebenen Klang passenden Anteile aus dem riesigen „Pool“ *asonanter* Teilresonanzen des Geigenkorpus in einem energetischen Summierungsprozeß in das Klangspektrum integriert.
Der Einschwingvorgang der „Resonanz“ wird nun durch einen der Kombinationstonbildung gegenläufigen Mechanismus, nämlich durch den der **Differenztonbildung**, ergänzt und vorangetrieben.
Dieser nimmt seinen Ausgang von angeregten „statistischen Intervallen“ im „rauschenden Medium“ der Klangharmonie.

Die sich hieraus herleitenden Differenztöne verleihen den *sonanten* Teilen des „*erzwungenen Klingens*“ einen mit der schwingenden Fläche wachsenden, von der Quantität der (für sich alleine natürlich vernachlässigbaren) Einzelereignisse also abhängigen, in der Summe bemerkenswerten energetischen Schub.

Diese Aussage bedarf natürlich der näheren Erläuterung. An dieser Stelle ist es also angebracht, detaillierter auf den Ergänzungsmechanismus der Differenztonbildung einzugehen:

Spielt man auf der Geige einen *Doppelgriff*, d.h. die beiden Töne eines Intervalls gleichzeitig, so klingen - hat man die Töne einer „reinen“ Stimmung genau getroffen - sehr deutlich Differenztöne in einem erheblich tieferen Frequenzbereich mit.[4]
Der bekannteste von ihnen ist der Differenzton mit der Frequenz $v = v_1 - v_2$, wobei v_1 die Frequenz des höheren und v_2 die des niedrigeren Intervalltones ist.
Handelt es sich bei dem gespielten Intervall um Töne, die als unmittelbare Nachbarn einer (zu ergänzenden) Obertonreihe zu verstehen sind - und das wären z.B. Quinte, Quarte, Terz usw. - so ist der dominant mitklingende Differenzton identisch mit dem Grundton der zu ergänzenden Reihe.

Dies wird sehr leicht erkennbar, wenn man die Frequenzen einer beliebigen Obertonreihe einmal nebeneinander schreibt. Der Einfachheit wegen nehme ich hier die Reihe auf dem Grundton 100 Hz. Die Reihe lautet dann (in Hz) 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700 usw.

Das Intervall von 100 Hz nach 200 Hz ist die Oktave
das von 200 Hz nach 300 Hz ist die Quinte
das von 300 Hz nach 400 Hz ist die Quarte
das von 400 Hz nach 500 Hz ist die große Terz
das von 500 Hz nach 600 Hz ist die kleine Terz usw.

Die Differenz beider Intervallfrequenzen (d.h. $v_1 - v_2$) beträgt immer 100 Hz, also die Frequenz des zugehörigen Grundtones.
Handelt es sich nun um Intervalle, die ein Intervall der Reihe überspringen, also z.B. um eine große Sext (das wäre in diesem Fall das Intervall von 300 Hz nach 500 Hz), so erklingt als Differenzton der 1. Oberton der zu ergänzenden Reihe (in diesem Fall 200 Hz).

Der besondere Klang und die besondere Stellung der Quinte im Ganzen beruht demnach darauf, dass für die Quinte beides zugleich gilt.
Einmal ist sie als Intervall von 200 Hz nach 300 Hz „unmittelbares“ Obertonintervall, zum anderen aber auch - als Intervall von 400 Hz nach 600 Hz - ein sozusagen „*einfach überspringendes*“ Intervall.

Diese Systematik lässt sich nun in der Tat beliebig fortsetzen. So ist der Differenzton ($v_1 - v_2$) bei *„zweifach überspringenden“* Intervallen der Klangreihe Teilton 3 der zu ergänzenden Obertonreihe, bei „*dreifach überspringenden*“ Intervallen Teilton 4 usw.

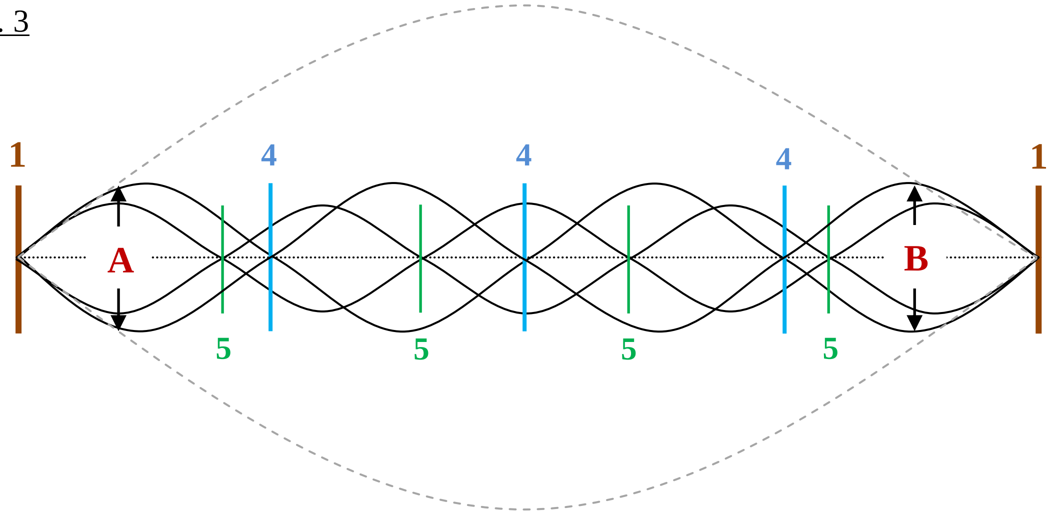
Der zur Ausbildung von Differenztönen führende systematische Automatismus bei intervallisch angeregten Resonanzen wird anschaulich und verständlich, wenn man die Abläufe - und da insbesondere die Interferenzbildung - am schwingenden elastischen System betrachtet.

---

[4] *Die Fähigkeit zur „**Differenztonresonanz**“ ist eines der wesentlichen Qualitätsmerkmale einer Geige.*

Ich verwende hierzu wieder die Idealisierung „verankerte elastische Strecke“ und rege diese gleichzeitig in den Frequenzen 1 zu 4 und 1 zu 5 zur Grundfrequenz an.

Abb. 3



Aus der Abbildung wird die Verteilung der stationären, sich überlagernden Knoten und Bäuche ersichtlich, wobei vom dynamischen Aspekt her die gemeinschaftlichen „Bauchbereiche“ - da sich hier die dynamischen Interferenzwirkungen d.h. die Additionen oder Subtraktionen der Schwingungsenergien ereignen - interessant sind.

Dabei wird klar, dass nach 4 bei der $^{4}/_{4}$ - Schwingung und nach 5 bei der $^{5}/_{5}$ - Schwingung, also exakt in der Frequenz der Grundschwingung, sich beide Amplitudenwirkungen partiell, d.h. abgestuft und vor allem eben im Bereich der Fixpunkte (**A**, **B**) nahezu vollständig addieren, also herausragende Amplituden entwickeln.
Damit erfüllen sich 2 Kriterien, die für ein „überlagerndes“ Grundschwingen erforderlich sind: die „Amplitudendominanz“ und die Frequenz.

Wenn man bedenkt, dass der geschilderte Vorgang mit der Zahl der in einem entsprechenden ganzzahligen Frequenzenverhältnis stehenden angeregten „körpereigenen“ Intervallschwingungen zu multiplizieren ist, kann man in etwa ermessen, welche Amplituden sich letztendlich aus dem *asonanten* Bereich hier auf solche Weise zu *sonanten* Frequenzen summieren.

2. Die Harmonieproportion Goldener Schnitt

Ich komme nun zu jener anderen, insbesondere in der belebten Natur auf vielfältigste Weise präsenten „Harmonieproportion“, dem „Goldenen Schnitt“.
Abgesehen von den offensichtlichen Harmoniewirkungen, die gleichermaßen vom Goldenen Schnitt wie vom Harmoniespektrum ausgehen, fällt es nun allerdings eigentümlich schwer, eine unmittelbare Verbindung zwischen beiden zu erkennen - im Gegenteil!
So ist schon das „mathematische Material“, auf dem beide jeweils gründen, von ausgesprochener Diametralität.
Während sich alle Größen des harmonischen Spektrums nämlich durch „rationale“ Zahlen exakt und vollständig beschreiben lassen, entziehen sich die Größen der „stetigen Teilung“ dem zahlenmäßig unmittelbaren rechnerischen Zugriff, ist die Maßzahl[5] des Goldenen Schnittes - ich nenne sie im Nachfolgenden g **-** „unaussprechlich“ oder, wie heute leicht irreführend gesagt wird, „irrational“.
Allerdings sind die Dinge und Zusammenhänge der Welt - wie der fundamentale Dualismus von Welle und Teilchen lehrt - von Grund auf allesamt offensichtlich scheinbar paradoxe Einheiten aus sich scheinbar widersprechenden Gegensätzlichkeiten.
Eine Diametralität der mathematischen Fundierung wäre so gesehen also schon fast eher Beleg für Einheitlichkeit - wie immer man diese dann auch zu verstehen hätte. Wenden wir uns an dieser Stelle zunächst der „irrationalen“ Zahl g oder $(1 +\sqrt{5})/2 = 1{,}61803398875...)$ zu.
Bei all dem vielen, was über diese in der Tat faszinierende Zahl zu sagen wäre (bzw. was schon gesagt wurde), für mich ist am bemerkenswertesten die Tatsache, daß ihr Kehrwert um exakt -1 und ihre erste Potenz um exakt +1 von ihr differieren.

Es gilt also zum einen: $\mathbf{{}^{1}/g = g - 1}$ bzw. $\mathbf{g - {}^{1}/g = 1}$

<u>Beweis</u>

da $g = ½ (\sqrt{5} +1)$ gilt

$$2/(\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5} + 1)/2 - 1$$
$$2/(\sqrt{5} + 1) = 1 + \sqrt{5} - 2/2 \quad \text{oder} \quad (\sqrt{5} - 1)/2$$
$$2 \cdot 2 = (\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1)$$
$$4 = 5 - 1 \; (= 4)$$

und es gilt zum anderen: $\mathbf{g^2 = g + 1}$ bzw. $\mathbf{g^2 - g = 1}$

<u>Beweis</u>

da $g = ½ (\sqrt{5} + 1)$ gilt

$$[½(\sqrt{5} + 1)]^2 = (\sqrt{5} + 1)/2 + 2/2$$
$$(1 + 2\sqrt{5} + 5)/4 = (3 + \sqrt{5})/2$$
$$(6 + 2\sqrt{5} +5)/4 = (3 + \sqrt{5})/2$$
$$2(3 + \sqrt{5})/4 = (3 + \sqrt{5})/2$$

Verfolgt man diese Spur weiter, so erkennt man rechnerisch sogleich, daß die Summe aus dem Kehrwert von g und dem Quadrat dieses Kehrwertes ebenfalls 1 ist:

---

[5] *Als Maßzahl des Goldenen Schnittes bezeichne ich hier den Wert, der sich ergibt, wenn man den größeren Teil einer Goldenen Teilung durch den kleineren teilt.*

$$\mathbf{{}^{1}/_{g^2} + {}^{1}/_{g} = 1} \qquad (0{,}381966011 + 0{,}618033989 = 1)$$

Aus diesen eigenartigen Gleichungen läßt sich nun ein geometrischer Folgenabschnitt mit dem Quotienten g bilden:

$$\mathbf{{}^{1}/_{g^2},\ {}^{1}/_{g},\ 1,\ \ g,\ \ g^2}$$

Verfolgt man diese Folge von links nach rechts, dann ist Glied 3 (d.h. **1**) gleich der Summe von Glied 1 und Glied 2 (ist also $\mathbf{{}^{1}/_{g^2} + {}^{1}/_{g} = 1}$), dann ist Glied 4 (d.h. $\boldsymbol{g}$) gleich der Summe von Glied 2 und Glied 3 (ist also $\mathbf{{}^{1}/_{g} + 1 = \boldsymbol{g}}$) und dann ist Glied 5 (d.h. $\boldsymbol{g^2}$) gleich der Summe von

Glied 3 und Glied 4 (ist also $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$).

Dieser mathematische Folgenabschnitt entspricht also in seiner Summensystematik der **Fibonacci-Folge**, bei der bekanntlich jedes Glied der Summe seiner beiden Vorglieder entspricht. (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...)

Komplettiert man nun den Folgenabschnitt mittels des gegebenen Quotienten $\boldsymbol{g}$, dann kann man sie mathematisch so darstellen:

$${}^{1}/_{g^{x\to\infty}} \leftarrow {}^{1}/_{g^5},\ {}^{1}/_{g^4},\ {}^{1}/_{g^3},\ {}^{1}/_{g^2},\ {}^{1}/_{g},\ \underline{\mathbf{1}},\ g,\ g^2,\ g^3,\ g^4,\ g^5 \rightarrow g^{x\to\infty}$$

Ich nenne nun diese sich sozusagen in der **<u>1</u>** brechende mathematische Folge hier „***g*-Folge**“ und prüfe zunächst, ob die Summensystematik nach Fibonacci-Art für alle ihre Glieder gilt - was sich in der Tat sogleich bestätigt:

Behauptung	**Beweis**
${}^{1}/_{g^5} + {}^{1}/_{g^4} = {}^{1}/_{g^3}$	${}^{1}/_{g^5} + {}^{1}/_{g^4} = (1 + g) / g^5$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist ${}^{g^2}/_{g^5} = {}^{1}/_{g^3}$
${}^{1}/_{g^4} + {}^{1}/_{g^3} = {}^{1}/_{g^2}$	${}^{1}/_{g^4} + {}^{1}/_{g^3} = (1 + g) / g^4$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist ${}^{g^2}/_{g^4} = {}^{1}/_{g^2}$
${}^{1}/_{g^3} + {}^{1}/_{g^2} = {}^{1}/_{g}$	${}^{1}/_{g^3} + {}^{1}/_{g^2} = (1 + g) / g^3$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist ${}^{g^2}/_{g^3} = {}^{1}/_{g}$
${}^{1}/_{g^2} + {}^{1}/_{g} = \underline{\mathbf{1}}$	${}^{1}/_{g^2} + {}^{1}/_{g} = (1 + g) / g^2$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist ${}^{g^2}/_{g^2} = \underline{\mathbf{1}}$
${}^{1}/_{g} + \underline{\mathbf{1}} = g$	${}^{1}/_{g} + \underline{\mathbf{1}} = (1 + g) / g$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist ${}^{g^2}/_{g} = g$
$1 + g = g^2$	wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist $g^2 = g^2$
$g + g^2 = g^3$	$g + g^2 = (1 + g) \cdot g$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist $g \cdot g^2 = g^3$

usw.

Oder allgemein ausgedrückt

Behauptung	**Beweis**
${}^{1}/_{g^{n+1}} + {}^{1}/_{g^n} = {}^{1}/_{g^{n-1}}$	$(1 + g) / g^{n-1} = {}^{1}/_{g^{n-1}}$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist ${}^{g^2}/_{g^{n+1}} = {}^{1}/_{g^{n+1-2}} = {}^{1}/_{g^{n-1}}$
$g^n + g^{n+1} = g^{n+2}$	$(1 + g) \cdot g^n = g^{n+2}$ wegen $\mathbf{1 + \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g^2}}$ ist $g^n \cdot g^2 = g^{n+2}$

Da die g-Folge einen konstanten Quotienten aufweist und jedes Glied leicht erkennbar das geometrische Mittel seiner unmittelbaren Nachbarn ist, gehört sie - wie gesagt - zugleich zur Gattung der geometrischen Folgen (1.Ordnung) als auch zu der der Fibonacci-Folgen (wobei im späteren noch gezeigt werden wird, daß die Fibonacci-Folgen auf eine allerdings spezifische Weise ebenfalls zu den geometrischen Folgen 1.Ordnung zu zählen sind.)

Verfolgt man nun die reinen Zahlenwerte der g-Folge in Richtung $g^{x\to\infty}$, dann fällt auf, daß die sich in den Stellen nach dem Komma ausdrückenden Abweichungen von der nächstliegenden ganzen Zahl mit zunehmender Potenzzahl immer geringer werden.
Die g-Glieder scheinen sich demnach mit der Zunahme ihrer Indexzahl immer mehr der Ganzzahligkeit anzunähern.

Bei der nachfolgenden Tabelle habe ich deswegen neben die g-Potenzen ihre jeweiligen Kehrwerte gesetzt, weil dabei eine überaus seltsame Übereinstimmung zwischen den Differenzen der g-Potenzen zur nächstliegenden ganzen Zahl und den jeweiligen Kehrwerten ins Auge fällt.

***g*-Potenz**	**nächste ganze Zahl**	**Kehrwert *g*-Potenz /** Differenz zur nächsten ganzen Zahl
$g^2 = 2{,}618033987...$	3	$^1/g^2 = 0{,}381966012...$
$g^3 = 4{,}236067977...$	4	$^1/g^3 = 0{,}236067977...$
$g^4 = 6{,}854101966...$	7	$^1/g^4 = 0{,}145898033...$
$g^5 = 11{,}090169943...$	11	$^1/g^5 = 0{,}090169943...$
$g^6 = 17{,}944271909...$	18	$^1/g^6 = 0{,}055728090...$

Die Abweichungen der Werte von der nächsten ganzen Zahl sind dabei - wie man leicht erkennen kann - bei den geradzahligen Potenzen „negativ“ und bei den ungeradzahligen Potenzen „positiv“. Wir haben nun dies bis zu $\boldsymbol{g^{31}}$ mit **100-stelliger** Genauigkeit überprüft. Es zeigte sich, daß bei den ungeradzahligen Potenzen (g^{xu}) die Restsummen hinter dem Komma tatsächlich **bis zur letzten Stelle mit dem Kehrwert identisch** sind, daß also gilt: $\boldsymbol{g^{xu} - {}^1/g^{xu}}$ **= ganzzahlig**.
Bei den geradzahligen g-Potenzen (g^{xg}) gilt: $\boldsymbol{g^{xg} + {}^1/g^{xg}}$ **= ganzzahlig.**

Es gilt danach also:
$g - {}^1/g = 1$, $g^2 + {}^1/g^2 = 3$, $g^3 - {}^1/g^3 = 4$, $g^4 + {}^1/g^4 = 7$, $g^5 - {}^1/g^5 = 11$, $g^6 + {}^1/g^6 = 18$, $g^7 - {}^1/g^7 = 29$ usw.

(Wie leicht zu erkennen ist, bilden die ganzen Zahlen eine Summenfolge nach Fibonacci-Art).

Nimmt man eine Zahl mit ihrem Kehrwert mal, so ist das Ergebnis stets 1.
Diese Banalität gilt natürlich auch für die g-Folge. Das Bemerkenswerte ist - wie gesagt - hier allerdings, daß der Kehrwert eines g-Gliedes mit dem Differenzwert zur nächsten ganzen Zahl identisch ist, daß demnach z.B. also das Produkt einer „irrationalen“ Dezimalkette und einer „irrationalen“ Zahl eine rationale Zahl, nämlich 1 ergibt.

Eine - wie mir scheint - bedeutsame Konsequenz aus diesem Zusammenhang liegt in der eindeutigen Bestätigung der zunächst aus der einfachen Zahlenbetrachtung hergeleiteten Vermutung, daß die g-Glieder sich mit der Zunahme ihrer Indexzahlen der absoluten Ganzzahligkeit nähern. Wenn nämlich die Abweichung - wie eben der Kehrwert - bei einem nach unendlich strebendem Wert nach Null streben, streben nach unendlich großen Zahlen systematisch also der Ganzzahligkeit zu.
Bemerkenswert ist nun, dass die Abweichung von der jeweils nächsten ganzen Zahl bei den g-Potenzen, d.h. den Gliedern der g-Folge im Wechsel positiv und negativ ausfallen.
Die *g*-Glieder schwingen sozusagen also um die Ganzzahligkeit.

Dieses Schwingen verläuft dabei - da die Abnahme der „Amplituden“, wie gesagt, der Folge der g-Kehrwerte folgt - kontinuierlich nach dem konstanten Quotienten g. Es gleicht mathematisch damit exakt einer gedämpften Schwingung mit dem **Dämpfungsfaktor *g***. [6]

<u>Differenzwerte der ersten sieben Glieder der *g*-Folge zur jeweils nächsten ganzen Zahl</u>

***g*-Folge**	**Bezugszahl**	**Differenz**
g = 1,6180339887...	1	+ 0,6180339887...
g^2 = 2,6180339887...	3	- 0,3819660112...
g^3 = 4,2360679774...	4	+ 0,2360679774...
g^4 = 6,8541019662...	7	- 0,1458980337...
g^5 = 11,090169943...	11	+ 0,090169943...
g^6 = 17,9442719099...	18	- 0,0557280900...
g^7 = 29,0344418537...	29	+ 0,0344418537... usw.

An dieser Stelle zunächst ein kurzes Resümee:

Bei der „Goldenen Folge“ handelt es sich um eine Spezies der geometrischen Folgen 1.Ordnung. Ihre jeweiligen Glieder entsprechen dabei der Summe der beiden jeweils unmittelbar vorausgehenden Glieder, ihr Quotient ist identisch mit g, der Maßzahl des Goldenen Schnittes, so wie diese hier definiert worden ist.
Von der „Basiszahl“ 1 ausgehend sind ihre Glieder in Richtung $a_{n\to\infty}$ daher Potenzen von g, das heißt „irrationale Zahlen“, die sich - wie gezeigt - mit zunehmender Indexzahl immer mehr der Ganzzahligkeit annähern.
Diese Annäherung verläuft mathematisch exakt nach Art einer gedämpften Schwingung. Der konstante Dämpfungsfaktor entspricht dabei dem Wert von g.
Höchst bemerkenswert ist, daß das Produkt aus dem Differenzwert eines *g*-Gliedes zur nächsten ganzen Zahl und dem Glied selber stets die Basiszahl 1 ergibt.

In diesem Zusammenhang ist darüber hinaus nun darauf zu verweisen, daß jede beliebige ganze Zahl eine solche „Basiszahl“ für jede beliebige geometrische Folge sein kann. Dabei verstehe ich unter Basiszahl den kleinsten der ganzzahligen Werte, den die Folge auf ihrem Weg von

[6] Versteht man dementsprechend den Wert der Abweichung von der Ganzzahligkeit unter dem Aspekt des Schwingens als Qualität (Amplitude) und den Wert der jeweiligen ganzen Zahl selber als Quantität, dann bestätigt - weil der Wert der ganzen Zahl nach dem gleichen Faktor gewachsen ist mit dem der Wert der Abweichung schrumpfte - der sich hier ausdrückende Ablauf exakt das im Früheren hier festgestellte Prinzip der Konstanz des Produktes aus Qualität und Quantität.

$a_{n\to\infty}$ durchläuft, in dem der Folgenverlauf sozusagen gebrochen wird. Die geometrische Folge mit dem Quotienten 3 kann z.B. in der Basiszahl 7 „gebrochen“ werden.

Die geometrische Folge mit dem Quotienten 3 und der Basiszahl 7 lautet dann:

$q_{\rightarrow} = 3 \quad q_{\leftarrow} = {}^{1}/_{3}$ $\qquad a_{n\to 1/\infty} \leftarrow 0{,}0864197; 0{,}259; 0{,}777; 2{,}333; \underline{7}; 21; 63; 189 \rightarrow a_{n\to\infty}$

Bezeichnet man die Basiszahl mit B, die Indexzahl eines Gliedes mit n und den Quotienten mit q, dann ist jedes Glied a einer geometrischen Folge

bei $a_{n\to\infty}$ und $B = a_o$: $\qquad \boldsymbol{a_{n\to\infty} = B \cdot q^{n-1}}$

bei $a_{n\to{}^{1}/\infty}$ lautet die Formel: $\qquad \boldsymbol{a_{n\to{}^{1}/\infty} = B \cdot {}^{1}/q^{n-1}}$

Errechne ich das Produkt aus $a_{n\to\infty} \cdot a_{n\to{}^{1}/\infty}$ dann ergibt dies:

$$\boldsymbol{B \cdot q^{n-1} \cdot B \cdot {}^{1}/q^{n-1} = B^2}$$

Bezogen auf die „Goldene Folge“ (also bei $q = g$) und bei einer beliebigen Basiszahl, also z.B. bei $B = 2$ führt dies bei $a_{n\to\infty}$ und $g = 1{,}618033989$ zu der Folge:

$$\begin{aligned} a_o &= 2 \\ a_1 &= 2 \cdot g = 3{,}236067978 \\ a_2 &= 2 \cdot g^2 = 5{,}236067978 \\ a_3 &= 2 \cdot g^3 = 8{,}472135959 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

und bei $a_{n\to 1/\infty}$ und $g = 1{,}618033989$ zu der Folge:

$$\begin{aligned} a_0 &= B = 2 \\ a_1 &= 2 \cdot {}^{1}/_{g} = 1{,}236067978 \\ a_2 &= 2 \cdot {}^{1}/_{g^2} = 0{,}763932023 \\ a_3 &= 2 \cdot {}^{1}/_{g^3} = 0{,}472135955 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Die Summensystematik bleibt bei einer von 1 abweichender Basiszahl (B) natürlich erhalten.

Jedes Glied der g-Folge mit der Basiszahl 2 ist also bei $a_{n\to\infty}$ gleich der Summe und bei $a_{n\to 1/\infty}$ gleich der Differenz seiner Vorglieder.

Das Produkt aus Glied und „Kehrglied“ ergibt:

$$\begin{aligned} B \quad \cdot \quad B \quad &= 4 = B^2 \\ 3{,}236067977 \cdot 1{,}236067977 &= 4 = B^2 \\ 5{,}236067977 \cdot 0{,}763932023 &= 4 = B^2 \\ 8{,}472135956 \cdot 0{,}047213595 &= 4 = B^2 \\ 13{,}70820393 \cdot 0{,}291796068 &= 4 = B^2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

In diesem Sinne bedürfen alle anfangs aufgestellten Beziehungen, wie z.B. ${}^{1}/_{g^2} + {}^{1}/_{g} = 1$

oder $g^2 - g = 1$ genaugenommen der Ergänzung durch B.[7]

Die jeweiligen Gleichungen lauten korrekterweise also:

---

[7] *Dies fiel zunächst deswegen nicht auf, weil stets von der Basiszahl 1 ausgegangen wurde und das Quadrat von 1 natürlich von 1 nicht differiert.*

$$(B \cdot {}^1/g^2) + (B \cdot {}^1/g) = B \text{ bzw. } (B \cdot g^2) - (B \cdot g) = B$$

Eine Verallgemeinerung der Goldenen Folgen führt somit zu der Bezeichnung:

$$(B \cdot {}^1/g^{x\to\infty}) \leftarrow (B \cdot {}^1/g^3),\ (B \cdot {}^1/g^2),\ (B \cdot {}^1/\mathrm{g}),\ \underline{\mathbf{B}},\ (B \cdot g),\ (B \cdot g^2),\ (B \cdot g^3) \to (B \cdot g^{x\to\infty})$$

Die für die Goldenen Folgen wie auch für die Fibonacci-Folgen typische Summensystematik ($a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$) führt u.a. zu der Formel:

$$\frac{B \cdot a_{n+2} - B \cdot a_n}{B \cdot a_{n+1} + B \cdot a_n} = q - 1$$

Im Zusammenhang der „Goldenen Folge“ erscheint diese Gleichung deswegen banal, weil $q - 1 = g - 1$ ($= {}^1/_g$) ist und der Bruch damit nicht anderes als das Verhältnis des kleineren ($B \cdot a_{n+1}$) zum größeren Glied ($B \cdot a_{n+2}$) beschreibt.

Interessanterweise gilt die o.g. Formel aber auch unabhängig von der Summensystematik der Goldenen- und der Fibonacci-Folgen grundsätzlich für alle geometrischen Folgen und Reihen.

Genaugenommen ist damit die Summensystematik als solche, die die Formel im Zusammenhang von Goldener Folge und Fibonacci-Folge in der Tat banal erscheinen ließ, nichts anderes als die Konsequenz einer Kuriosität, nämlich der Gleichheit von ${}^1/g$ und $g - 1$, auf der der Sonderstatus von g eben beruht.

Erwähnenswert erscheint mir in diesem Zusammenhang auch die generell für alle geometrischen Reihen geltende Formel

$$S_{B\to a_n} (\mathrm{q} - 1) = a_{n+1} - B$$

Da wie gesagt für die Goldenen Folgen (und in einem spezifischen Sinn auch für die Fibonacci-Folgen) gilt, daß $q - 1 = g - 1 = {}^1/_g$ ist, folgt hieraus:

$$S_{B\to a_n} \cdot {}^1/_g = a_{n+1} - B$$

und nach der Multiplikation mit g:

$$S_{B\to a_n} = (a_{n+1} - B) \cdot g \quad \text{bzw.} \quad S_{B\to a_n} = g \cdot a_{n+1} - B \cdot g$$

$g \cdot a_{n+1}$ ist nun identisch mit a_{n+2} und $B \cdot g$ identisch mit a_1

Im Zusammenhang der Goldenen Folgen gilt danach also auch:

$$S_{B\to a_n} = a_{n+2} - a_1$$

Hieraus wiederum folgt nun, daß die Summe aller Glieder der Goldenen Folgen von B bis a_n abzüglich des kleinen Restes von a_1 (bzw. $B \cdot g$) sich mit dem übernächsten Glied nach a_n, d.h. mit a_{n+2} , verdoppelt. Dies erinnert an den Verdoppelungsmechanismus bei der reinen geometrischen Verdoppelungsreihe, der Reihe also mit dem Quotienten 2.

Hier gilt die Formel:

$$S_{B\to a_n} = a_{n+1} - B$$

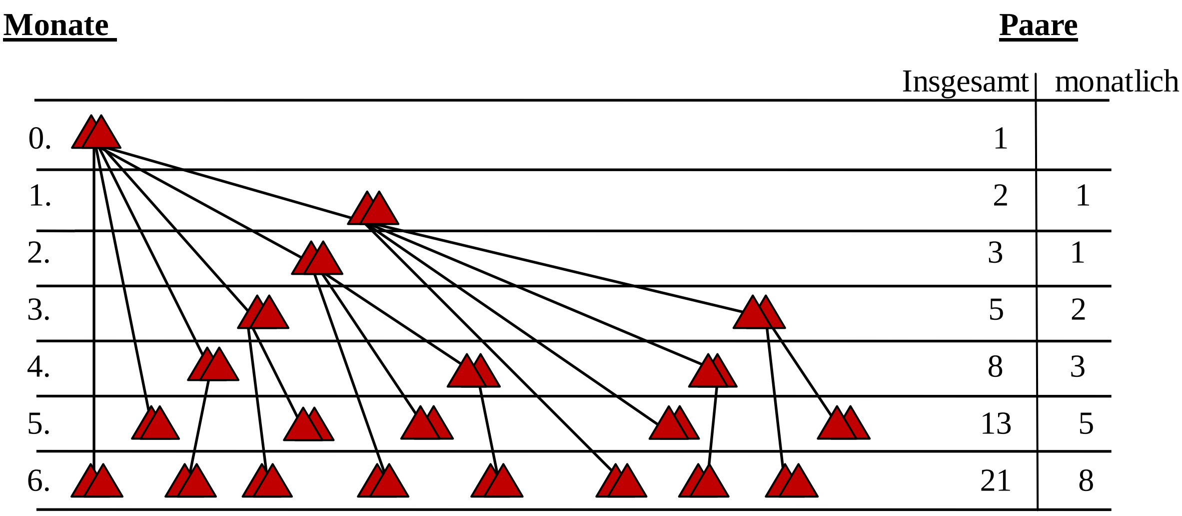
Das unmittelbar nachfolgende Glied minus der vernachlässigbar kleinen Summe von B beinhaltet also eine Verdoppelung der Gesamtsumme des Bisherigen.

Die Goldene Reihe ist demnach sozusagen eine Verdoppelungsreihe mit Verzögerung. Sie enthält damit gewissermaßen ein zeitliches Puffer (das nämlich eines ganzen Gliedes), welches sie für reale und das sind prozeßhaft in der Zeit ablaufende komplexe, insbesondere also für biologische Verdoppelungsmechanismen mathematisch geeignet erscheinen läßt.

Eine Überlegung solcher Art war es in der Tat dann auch, die Fibonacci[8] seinerzeit überhaupt auf die nach ihm benannte Summenfolge (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 usw.) stoßen ließ.

In seinem Buch, *liber abaci*, konstruierte er sinngemäß die folgende mathematische Aufgabe:
Ein Kaninchenpaar, das pro Monat ein weiteres Paar wirft, befinde sich in einem abgeschlossenen Raum.
Jedes neue Paar benötigt nun einen Monat bis zur Geschlechtsreife und wirft danach gleichfalls monatlich jeweils ein Paar.

Das Ergebnis der ganzen Prozedur kann mathematisch etwa so dargestellt werden:



[8] *Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, Mathematiker im 12. Jahrhundert*

Man sieht, dass (und wie) sowohl die Summen der Paare insgesamt als auch die Anzahl der pro Monat hinzukommenden Paare jeweils den Zahlen der Fibonacci-Folge entsprechen.

Auf indirekte Weise tritt im übrigen die Fibonacci-Folge auf adäquate Weise auch mehrfach in Erscheinung, wenn man die Glieder der *g*-Folge als Vielfache von *g* darstellt — wobei die hier nachfolgend als „*g-Summenfolge*“ bezeichnete Folge dann entsteht, wenn man 2 Glieder nach *Fibonacci-Art* jeweils zu einem nächsten Glied addiert.

***g*-Folge**		***g-Summenfolge***		***g-Kombinationsfolge***	
$\mathbf{g = g + 0}$	$g - g = 0$				
$\mathbf{g^2 = g + 1}$	$g^2 - g = 1$		$1 = 1/g + 1/g^2$	$g^2 - g = 1/g + 1/g^2$	$\mathbf{g = g^2 - 1}$
$\mathbf{g^3 = 2g + 1}$	$g^3 - 2g = 1$	$\mathbf{g = 1 + 1/g}$	$1 = g - 1/g$	$g^3 - 2g = g - 1/g$	$\mathbf{3g = g^3 + 1/g}$
$\mathbf{g^4 = 3g + 2}$	$g^4 - 3g = 2$	$\mathbf{g = 2 - 1/g^2}$	$2 = g + 1/g^2$	$g^4 - 3g = g + 1/g^2$	$\mathbf{4g = g^4 - 1/g^2}$
$\mathbf{g^5 = 5g + 3}$	$g^5 - 5g = 3$	$\mathbf{2g = 3 + 1/g^3}$	$3 = 2g - 1/g^3$	$g^5 - 5g = 2g - 1/g^3$	$\mathbf{7g = g^5 + 1/g^3}$
$\mathbf{g^6 = 8g + 5}$	$g^6 - 8g = 5$	$\mathbf{3g = 5 - 1/g^4}$	$5 = 3g + 1/g^4$	$g^6 - 8g = 3g + 1/g^4$	$\mathbf{11g = g^6 - 1/g^4}$
$\mathbf{g^7 = 13g + 8}$	$g^7 - 13g = 8$	$\mathbf{5g = 8 + 1/g^5}$	$8 = 5g - 1/g^5$	$g^7 - 13 = 5g - 1/g^5$	$\mathbf{18g = g^7 + 1/g^5}$

usw.[9]

Wie man sieht sind die Glieder der *g*-Folge jeweils Summe zweier verschobener paralleler Summenfolgen, nämlich der *Summenfolge* auf der Basiszahl *g* zum einen und der Summenfolge auf der Basiszahl 1 (d.h. der Fibonacci-Folge) zum anderen.

Wie die Tabelle zeigt, differieren dabei die Glieder der „*g-Summenfolge*“ - das ergibt sich unmittelbar auch aus der Beziehung zur *g*-Folge selbst - um ± der jeweiligen Potenz von $^1/_g$ von der nächstliegenden ganzen Zahl, wobei diese wiederum eine Fibonacci-Zahl ist.

Dies nun deutet darauf hin, daß die so sehr viel bekanntere Fibonacci-Folge tatsächlich nur eine **Komponente** der Goldenen Folge ist.

Man darf die - wenn man so will - „komplementäre Natur“ der Goldenen Folge danach als Miteinander je einer „irrationalen“ (*g-Summenfolge*) und einer „rationalen“ (Fibonacci-Folge) Summenfolge interpretieren.

Wie dies letztendlich dann zu verstehen ist, bleibt dabei hier allerdings eine noch offene Frage.

Ermittelt man der Reihe nach die Quotienten der Fibonacci-Folge, dann stellt man fest, daß sich diese recht rasant auf den Wert *g* hin einpendeln.

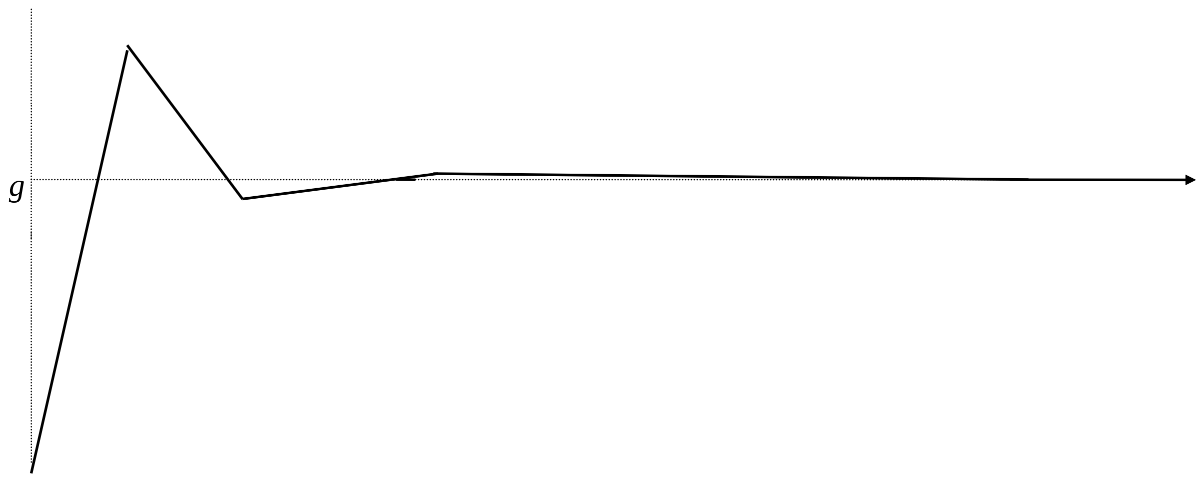
---

[9] *Hier fällt eine weitere Parallele zum Kaninchenbeispiel Fibonaccis auf. Auch dort waren zwei nebeneinander laufende und jeweils verschobene Fibonacci-Folgen zu erkennen. Die erste, hier als g-Produkt auftretende Folge stand dort - wie gezeigt - für die Summe aller bis dahin existierenden und die zweite für die Zahl der jeweils pro Monat neu hinzugekommener Paare.*

Nach 15 Gliedern reicht die Übereinstimmung mit *g* bereits bis zur 5. Stelle und nach 20 Gliedern bereits bis zur 7.Stelle hinter dem Komma usw.

Fibonacci-Quotienten	**Differenzen zu *g***
1 : 1 = 1	- 0,618033989
2 : 1 = 2	+ 0,381966011
3 : 2 = 1,5	- 0,118033989
5 : 3 = 1, $\overline{6}$	+ 0,048632678
8 : 5 = 1,6	- 0,018033989
13 : 8 = 1,625	+ 0,006966011
21 : 13 = 1,615384615	- 0,002649374
34 : 21 = 1,619047619	+ 0,001013630
55 : 34 = 1,617647059	- 0,000386930
89 : 55 = 1,618181818	+ 0,000147829

Differenzen der *g*-Werte von der Konstanten *g* als Kurve



Ich deute diese Kurve als ein gedämpftes Schwingen um *g* und ermittle den vorausgesetzten „Dämpfungsfaktor“ nun mit Hilfe des Quotienten der Fibonacci-Differenzen zu *g*

q_1 = 0,618033989 / 0,381966011 = 1,618033989
q_2 = 0,381966011 / 0,118033989 = 3,236067969
q_3 = 0,118033989 / 0,048632678 = 2,427050984
q_4 = 0,048632678 / 0,018033989 = 2,696723282
q_5 = 0,018033989 / 0,006966011 = 2,588854511
q_6 = 0,006966011 / 0,002649374 = 2,629304507
q_7 = 0,002649374 / 0,001013630 = 2,613748606
q_8 = 0,001013630 / 0,000386930 = 2,619672809

Zunehmend deutlicher erkennbar wird auch hier ein gedämpftes Schwingen und zwar diesmal um g^2.

Wir haben diesen Zusammenhang mit einer 100-stelligen Genauigkeit für die Fibonacci-Zahlen Fib.94 bis Fib.100 berechnet und stellten dabei fest, daß die Übereinstimmung der „g-Differenz-Quotienten“ mit g^2 in der Tat nicht geringer war als zuvor die der entsprechenden Fibonacci-Quotienten mit g. Sie reichte in beiden Fällen je nach Höhe der Fibonacci-Zahl von 39 bis 41 Stellen hinter dem Komma.

Auch diese (extrem geringen) g^2-Differenzen zeigten nun ein deutliches Schwingverhalten - auch diesmal um den Wert von g^2.

Wir setzten wegen dieser erstaunlichen Systematik die rechnerische Prozedur fort und es zeigte sich, daß die aus den neuerlichen g^2-Differenzen ermittelten Quotienten im Schnitt bis zu 20 Stellen hinter dem Komma wiederum mit g^2 übereinstimmten.

Die Werte lagen diesmal allerdings ausnahmslos **höher** als g^2, wobei sich sogar in dem Sinne eine Umkehrung des vorherigen Verhaltens vollzog, als diesmal die Differenzen zu g^2 mit der Höhe der Fib.-Zahlen anstiegen.

Das Progressionsverhalten wies dabei den Quotienten g^4 auf — wobei die Genauigkeit hier immerhin noch bis zur ca. 18. Stelle hinter dem Komma reichte.

Im Zusammenhang geometrischer Folgen gilt, daß jedes Glied geometrisches Mittel seiner Nachbarn ist. Für die Fibonacci-Folge gilt dies natürlich nur in einem annähernden Sinn.

Fibonacci-Zahl			**Mittelwert**
1	$\sqrt{1\cdot 2}$	=	1,414213562
2	$\sqrt{1\cdot 3}$	=	1,732050808
3	$\sqrt{2\cdot 5}$	=	3,16227766
5	$\sqrt{3\cdot 8}$	=	4,898979486
8	$\sqrt{5\cdot 13}$	=	8,062257748
13	$\sqrt{8\cdot 21}$	=	12,96141814
21	$\sqrt{13\cdot 34}$	=	21,02379604
34	$\sqrt{21\cdot 55}$	=	33,98529094
55	$\sqrt{34\cdot 89}$	=	55,00909016

Die Differenzen zwischen Fibonacci-Zahl und zugehörigen geometrischem Mittel sowie die jeweiligen Quotienten daraus betragen:

+0,414213562

$\frac{0,414213562}{0,267949192} = 1,545866061$

-0,267949192

$\frac{0,267949192}{0,16227766} = 1,651177322$

+0,16227766

$\frac{0,16227766}{0,101020514} = 1,606383234$

-0,101020514

$\frac{0,101020514}{0,062257748} = 1,622617542$

+0,062257748

$\frac{0,062257748}{0,0385186} = 1,6163035$

-0,0385186

$\frac{0,0385186}{0,02379604} = 1,618697901$

+0,02379604

$\frac{0,02379604}{0,01470906} = 1,61772176$

-0,01470906

$\frac{0,01470906}{0,00909016} = 1,618189339$ usw.

Die Differenzen pendeln wiederum deutlich erkennbar gedämpft um den Wert *g*, bleiben in diesem Sinne also quasikonstant. Ich verstehe damit die Fibonacci-Folge bzw. die Gesetzmäßigkeit, die sich über diese offenbart, als eine spezifisch schwingende Form der geometrischen Folgen 1.Ordnung.

Und in diesem Sinne weist sie für mich in der Tat - weil ein erkennbares Schwingen eine Ebene oder ein stationäres Medium voraussetzt, das da schwingt oder in dem eingebettet etwas schwingt - **über den Bereich des jetzt und hier konkret Faßbaren hinaus.**

Dies wiederum bedeutet, dass ein über das Dargestellte Hinausgehendes nicht anders als spekulativ sein kann, wobei dem spekulativen Charakter einer Aussage, sofern diese natürlich hinreichend allgemein gehalten wird, keineswegs etwas Anrüchiges anhaftet. Der Mut zu spekulativen Aussagen gehört im Gegenteil - will man in der Sache weiterkommen - zum absolut Unverzichtbaren.

Ich „mutmaße“ in diesem Sinne, daß das gedämpfte Schwingen der *g*-Folgen um die jeweils zugehörige, d.h. am nächsten liegende ganze Zahl und das gedämpfte Schwingen der Fibonacci-Quotienten um die „Goldene Konstante“ *g* auf etwas wie eine „metaphysikalische Dimension“ oder „Medialität“ verweisen - zumindest aber auf ein (wie auch immer geartetes) „stationäres Moment“ jenseits der konkreten Dinge.

Und wenn denn - wofür in der Tat alles spricht - wahr ist, daß zumindest alles was für uns erkennbar ist (und je sein wird) sich im Zustand des Schwingens befindet, dann steht die „irrationale Natur“ der Zahl g vielleicht für ein „stationäres Etwas“, das nach aller Logik - so behaupte ich - in letzter Konsequenz im Sinne eines Substantiellen hinter einem jeden Schwingen ursächlich und bedingend einfach vorauszusetzen ist.

Auf dieser Grundlage wäre g, weil diese Zahl auf etwas hindeutet, was zwar ist, sich unserem unmittelbaren wahrnehmenden Erkennen aber entzieht, dann in der Tat nicht nur nicht „irrational“, sondern in einem tieferen, d.h. ins „Metaphysikalische“ hineinreichenden Sinn sogar höchst rational.

Und genau an dieser Stelle offenbart sich ein neuer und, wie ich finde, faszinierender und vielversprechender Aspekt!
Das fortschreitende Schwingen und Teilen der „Goldenen Proportionalität“ und das „stehende Schwingen“ und Geteiltsein des spektralen Harmoniesystems wären auf solche Weise über dieses metaphysikalische Etwas tatsächlich miteinander vereinbar.
Nach den Gesetzen der Physik wird aus einem fortschreitenden Schwingen dann nämlich ein stehendes, wenn das weitere Fortschreiten durch Grenzen gehindert zur Umkehr, d.h. zur Reflexion gelangt.
Fortschreitendes und stehendes Schwingen sind in einem universellen Raum, in dem nach dem fundamentalen Energiesatz der Physik kein Energiewirken „verloren gehen“ kann, der in letzter Konsequenz also als „begrenzt“ zu verstehen wäre, so etwas wie Vorphase und Phase im Schwingungsprozeß.

Was immer nun das sein mag, was sich über Zahlen, Proportionen, Konstanten usw. hier auf - wie ich finde - eindrücklich systematische Weise fassen und abstrakt beschreiben ließ, in irgendeiner Form und auf jeden Fall steht es für ein „Sein“, ein Fließen, ein Werden, steht es für Zeit aber wohl auch - und darauf verwies das Letztere hier - für „Nichtzeit“, steht es für etwas, was wir auf systematische Weise als harmonisch erleben - und so ja auch nennen.

Im verständlichen Bemühen, Harmonie als ein Ganzes zu erkennen, d.h. die spektralen Harmonien (z.B. Klang) und die Harmonien der fortschreitenden Teilung (Goldener Schnitt) auf eine gemeinschaftliche Basis zu stellen, habe ich früher - wie andere gewiß auch - eine schwingende Saite im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt und die sich aus dem Schwingen des Ganzen, sowie dem des größeren und kleineren Teiles dieser Teilung ergebenden Frequenzen zu einem Dreiklang zusammengestellt. Dieser Dreiklang verwies nun in der Tat zumindest auf den ersten Blick auf eine der Grundsäulen der Tonalität, nämlich auf das Tongeschlecht Moll.
Als ich diesen Zusammenhang dann allerdings genauer untersuchte, legte sich meine anfängliche Begeisterung sehr bald und es kamen mir doch erhebliche Zweifel.

Beispiel
Die ganze Saite habe die Eigenfrequenz A = 110 Hz. Der größere Teil der Goldenen Teilung schwingt dann in 110 Hz $\cdot\, g$ = 177,98… Hz und der kleinere in 110 Hz $\cdot\, g^2$ = 287,98... Hz
Die diesen Frequenzen am nächstliegenden Töne sind nun f (174,61 Hz) und d´ (293,66 Hz), ergeben also tatsächlich gemeinsam mit dem A (110 Hz) des Ganzen einen moll-Dreiklang, nämlich d-moll.

Die Frequenz des größeren der goldenen Teile liegt tatsächlich allerdings um ca. $^1/_3$ Halbton über f und die des kleineren um ca. $^1/_3$ Halbton unter d´. Beide Abweichungen von der genauen tonalen Frequenz addieren sich im Falle der vermeintlichen moll-Terz zum Wert von ca. $^2/_3$ Halbton (während die „Quinte" um ca. $^1/_3$ Halbton über der reinen Quinte liegt).
Der „Goldene Dreiklang" klingt also **äußerst schräg** - und wenn schon, dann näher bei Dur.
Mir erscheint eine Einordnung des Goldenen Dreiklanges in das harmonische Klangsystem nach allem also dann doch als zu gewaltsam.

Das nun allerdings wirklich unstrittige durchgehende und verbindliche Kriterium der stehenden Harmonie ist die Quantelung in jeweils **gleiche ganzzahlige Teile**, wobei die hier unterscheidenden Differenzen - wie im Früheren gezeigt wurde - mit dem Quantelungsgrad mehr und mehr verschwimmen, sozusagen also mit dem Teilungsgrad an Exaktheit verlieren.
Hier zeigt sich so etwas wie eine Umkehrung zum entsprechenden Prinzip des goldenen Teilens, so wie es jedenfalls im Ganzzahligkeitsbereich durch die Fibonacci-Folge repräsentiert wird.
Dort wurde nämlich die Exaktheit der Teilung nach der goldenen Proportion mit dem „Quantelungsgrad", d.h. mit der Größe der Zahlensumme immer **größer**.

Von 3 benachbarten Fibonacci-Gliedern gibt nun das größte den Teilungsfaktor, d.h. die gemeinschaftliche Maßeinheit der Teilung des Ganzen an, das mittlere gibt die Anzahl dieser Maßeinheiten für den größeren und das kleinste die Anzahl für den kleineren Abschnitt der goldenen Teilung wieder.
Ich nehme als Beispiel die benachbarten Fibonacci-Glieder: 377, 610, 987.
Der oben angeführten Regel gemäß teile ich eine beliebige Strecke in 987 gleiche Teile und stelle fest, daß die Teilung nach dem Goldenen Schnitt nach dem 377. dieser Teile gegeben ist. Der Rest von 610 Teilen steht dann für den größeren Abschnitt der Goldenen Teilung.

Unter der Voraussetzung der Ganzzahligkeit ist die Goldene Teilung notwendigerweise eine „pendelnde Größe", deren „Pendelausschlag" sich, wie gezeigt, mit der Zunahme des Quantelungswertes dann allerdings im relativ Bedeutungslosen verliert.

Im Fibonacci-Zusammenhang ist umgekehrt der Quantelungswert ein Summierungswert, d.h. ein feststehendes Ganzes wird hier nicht geteilt, sondern „feststehende Teile" summieren sich zu einem Ganzen. In diesem Sinne ist der Quantelungswert buchstäblich auch ein (physikalischer) „Massewert". Das aber heißt, daß mit der Größe des Quantelungswertes, das heißt mit der Anzahl der sich summierenden Teile, ein zunehmender Trägheitsfaktor ins Gewicht fällt - der als ein im physikalischen Sinn träges stationäres Moment zu verstehen wäre.

Das typische dynamisch fließende Wachsen z.B. eines organischen Summierungsprozesses gelangt damit **aus sich selber heraus** an natürliche Grenzen, die dann erreicht sind, wenn die innenwirkende Trägheit der sich summierenden Masse seiner Teile den nachströmenden Energiefluß vollständig kompensiert.
Wenn aber das Wachsen an seine Trägheitsgrenzen stößt, dann gelangt der Ausbreitungsprozeß zum Stehen, dann kehrt sich alle weitere Dynamik nach innen, wird sozusagen aus der „Quantitätenprogression" eine „Qualitätenprogression", etabliert sich - nur das bliebe, denke ich, im Sinne von Naturgesetzlichkeit realistischerweise dann noch zu vermuten - schlussendlich ein sich prozesshaft komplettierendes Harmoniesystem.

Zusammenfassung

Abschließend noch die für mich wesentlichsten aus dieser Untersuchung herzuleitenden konkreten Folgerungen:

1. Harmoniesysteme sind prinzipiell mit stehenden (d.h. in sich) **schwingenden** spektralen Ganzheiten zu identifizieren. Aus dieser Definition ergibt sich notwendigerweise eine „Zwei-Phasen-Natur“.

2. Die erste Phase wurde hier als „Harmonie des Werdens“ (oder physikalisch: des Einschwingens) und die zweite als „Harmonie des Dauerns“ (oder physikalisch: des Ausschwingens) bezeichnet.

3. Da in der komplexen Wirklichkeit dem Werden und Dauern des Spektrums stets allgemein und auch speziell dämpfende, d.h. störende Faktoren entgegenwirken, schwingen Harmoniesysteme der erfahrbaren Wirklichkeit stets gedämpft und mehr oder weniger weit vom „Ideal“ entfernt. **Dies bedeutet, daß ein ideales Harmoniesystem in zunächst einmal überhaupt nur mathematisch definierbar bzw. darstellbar ist**. Allerdings ist unter gezielt idealisierten Bedingungen (mein Beispiel war hier die Saitenresonanz), dem Ideal dann auch in der Praxis recht nahezukommen.

4. Dabei wird erkennbar, daß sich die Natur des Harmoniesystems über zwei komplementäre, polar gegensätzliche Faktoren offenbart. Der eine ist die Weite (Amplitude) des jeweiligen Schwingens, der andere dessen zeitlicher und geometrischer Teilungsgrad. Die erste der Komplementaritäten steht also für Qualität und die zweite für Quantität.

5. Für mich höchst bedeutsam erscheint nun, daß hier der mathematische Nachweis dessen gelang, was die Erfahrung durchaus ja längst nahelegte, daß nämlich das Produkt aus Qualität und Quantität im idealen Spektrum (Harmoniesystem) **konstant** ist — man im Harmoniezusammenhang also von einer umgekehrten Proportionalität von Qualität und Quantität auszugehen hat.

6. Harmoniesysteme sind prinzipiell Erscheinungen naturgesetzlicher und damit universeller Art. Hieraus ist zu schließen, daß sie sowohl der unbelebten, wie der belebten Wirklichkeit angehören. Konsequenterweise gehe ich hier soweit, grundsätzlich alle lebenden Organismen zu den Harmoniesystemen zu zählen. Womit alle physikalischen Harmoniegesetze - dem biologischen Wirklichkeitsbereich natürlich angepaßt - auch auf Zusammenhänge des Lebens zu übertragen wären.

7. Weil nun aus den Eigenheiten des Lebendigen die Fähigkeit des selbständigen Suchens und Schaffens idealisierter Bedingungen erwächst, kommen biologische Organismen dem Harmonie-Ideal insbesondere natürlich im „hochevolutionierten“ Zustand sogar besonders nah.

   Dabei zähle ich zu den Eigenheiten des Lebendigen vor allem die eigenenergetisch bewirkte Streckung der Ablaufzeiten, d.h. die Zerdehnung und damit auch die Homogenisierung der „harmonischen Phasen“.

8. Konkret bedeutet dies, daß die Harmoniephase des Werdens (Einschwingung) in ein sowohl summarisches (quantitatives) als zugleich auch strukturelles (qualitatives) Wachsen und die Harmoniephase des Dauerns (Ausschwingung) in eine „dynamische Zustandskontinuität", d.h. in einen Zustand, in dem der natürliche Dämpfungsabfall der Ausschwingungskurve über eigenenergetische Leistung zur (relativen) dynamischen Gleichförmigkeit gestreckt ist, transponieren. Beleg hierfür sind die im (summarisch gewachsenen) biologischen Organismus nachweisbaren fortschreitenden Proportionen des Goldenen Schnittes, Beleg sind ferner die für den „stehenden" Harmoniezustand typischen inneren Hierarchiestrukturen im gewachsenen biologischen Subjekt.

9. Letzteres nährt für mich nun die Hoffnung, daß die vorgelegte Untersuchung wohl auch Schlüssel zum Verständnis der individuellen und sozialen Existenzen des Menschen enthält.